

## 高校数学 専門問題例

例 1 実数  $x, y$  が  $x^2 + y^2 = 9$  を満たすとき、 $x^2 - y^2 + 4x$  の最大値と最小値を求めなさい。  
また、そのときの  $x, y$  の値を求めなさい。

例 2 不定方程式  $3x + 2y = 1$  の整数解の 1 組が  $x = 3, y = -4$  であることを用いて、不定方程式  $3x + 2y = 4$  の整数解をすべて求めなさい。

例 3 2 つの円  $x^2 + y^2 = 5 \cdots \textcircled{1}$ ,  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \cdots \textcircled{2}$  の交点を A, B とする。点 P が円  $\textcircled{1}$  上を動くとき、 $\triangle ABP$  の重心 G の軌跡を求めなさい。(H28)

例 4 正の実数からなる数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とおく。

数列  $\{a_n\}$  が  $4S_n = a_n^2 + 4n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を満たすとき、次の (1)・(2) の問いに答えなさい。

(1)  $a_1, a_2, a_3$  を求めなさい。

(2)  $a_n$  を予想し、それが正しいことを数学的帰納法により証明しなさい。

例 5 4 点 A(7, 5, 0), B(0, 6, 5), C(4, 4, 1), D(2, 0, 9) について、次の (1)・(2) の問いに答えなさい。

(1)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$  の値を求めなさい。

(2) 四面体 ABCD の体積を求めなさい。

例 6 次の (1)・(2) の問いに答えなさい。

(1) 関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  が微分可能であるとき、次の等式が成り立つことを、導関数の定義を用いて証明しなさい。

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(2)  $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$  のとき、次の不等式が成り立つことを、平均値の定理を用いて証明しなさい。

$$0 < \sin b - \sin a < b - a \quad (\text{H28})$$

例 7 2 つの曲線  $y = \sqrt{x}$ ,  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  と直線  $x = 1$  で囲まれた図形の面積を求めなさい。(H29)

例 8 曲線  $C: y = e^{x-n}$  について、次の (1)・(2) の問いに答えなさい。

- (1) 点  $(n, 0)$  を通り、曲線  $C$  に接する直線  $\ell$  の方程式を求めなさい。
- (2) 曲線  $C$ 、接線  $\ell$  および直線  $x = n$  で囲まれた部分を、 $x$  軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を  $V$  とする。 $V$  は  $n$  の値に関わらず一定の値になることを示しなさい。

例 9 次の文は、高等学校学習指導要領「数学」の「第 1 数学 I」「3 内容の取扱い」である。(a)～(c) にあてはまる語句を書きなさい。

- (1) 内容の(1)(数と式)のア(数と集合)の(i)(集合)については、簡単な (a) も扱うものとする。
- (2) 内容の(2)(図形と計量)のア(三角比)の(i)(鈍角の三角比)については、関連して (b) を扱うものとする。
- (3) 課題学習については、それぞれの内容との関連を踏まえ、(c) を高めるよう適切な時期や場面に実施するとともに、実施に当たっては数学的活動を一層重視するものとする。

例 10 次の文は、高等学校学習指導要領「数学」の「第 5 数学 B」「2 内容 (3) ベクトル」の一部である。(a)～(f) にあてはまる語句を語群より選び、記号で答えなさい。

(3) ベクトル

ベクトルの基本的な (a) について理解し、その (b) を認識するとともに、事象の考察に活用できるようにする。

ア 平面上のベクトル

(ア) ベクトルとその演算

ベクトルの意味、相等、和、差、(c)、(d) 及びベクトルの (e) について理解すること。

(イ) ベクトルの内積

ベクトルの内積及び基本的な性質について理解し、それらを (f) の性質などの考察に活用すること。

語群	ア	積	イ	意義	ウ	平面図形
	エ	実数倍	オ	方向ベクトル	カ	有用性
	キ	大きさ	ク	概念	ケ	位置ベクトル
	コ	平行移動	サ	意味	シ	図形
	ス	成分表示	セ	性質	ソ	三角形

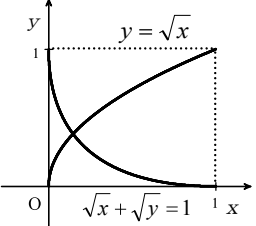
# 高校数学 正答例

問題番号	正 答
例 1	$x^2 + y^2 = 9 \text{ から } y^2 = 9 - x^2 \dots\dots①$ $y^2 \geq 0 \text{ であるから } 9 - x^2 \geq 0$ $\text{よって, } (x+3)(x-3) \leq 0$ $\text{ゆえに, } -3 \leq x \leq 3 \dots\dots②$ $x^2 - y^2 + 4x = x^2 - (9 - x^2) + 4x = 2x^2 + 4x - 9 = 2(x+1)^2 - 11$ $\text{よって, ②の範囲の } x \text{ について, } x^2 - y^2 + 4x \text{ は}$ $x=3 \text{ で最大値 } 21, x=-1 \text{ で最小値 } -11 \text{ をとる。}$ $\text{①から } x=3 \text{ のとき, } y^2=0 \text{ よって, } y=0$ $x=-1 \text{ のとき, } y^2=8 \text{ よって, } y=\pm 2\sqrt{2}$ $\text{したがって, } x=3, y=0 \text{ で最大値 } 21$ $x=-1, y=\pm 2\sqrt{2} \text{ で最小値 } -11$
例 2	$3x + 2y = 1 \dots\dots①$ $3x + 2y = 4 \dots\dots② \text{ とおく。}$ $x=3, y=-4 \text{ を①に代入すると}$ $3 \times 3 + 2 \times (-4) = 1 \dots\dots③$ $\text{③の両辺を 4 倍すると}$ $3 \times 12 + 2 \times (-16) = 4 \dots\dots④$ $\text{②から④を引いて}$ $3(x-12) + 2(y+16) = 0$ $3(x-12) = 2(-y-16) \dots\dots⑤$ $3 \text{ と } 2 \text{ は互いに素であるから}$ $x-12 \text{ は } 2 \text{ の倍数である。}$ $\text{よって, } x-12 = 2k \text{ (} k \text{ は整数)}$ $\text{⑤に代入して, } -y-16 = 3k$ $\text{したがって, 求める解は,}$ $x=12+2k, y=-16-3k \text{ (} k \text{ は整数)}$

問題番号	正 答
例 3	<p> <math>x^2 + y^2 = 5 \cdots \textcircled{1}</math>, <math>(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \cdots \textcircled{2}</math>において  <math>\textcircled{2} - \textcircled{1}</math>を整理して解くと <math>x = 1, 2</math>  よって交点 A, B の座標は <math>(2, 1), (1, 2)</math>  点 P, G の座標を, それぞれ <math>(s, t), (X, Y)</math> とする。  P は <math>\textcircled{1}</math> 上にあるから <math>s^2 + t^2 = 5 \cdots \textcircled{3}</math>  また, G は <math>\triangle ABP</math> の重心であるから  <math>X = \frac{3+s}{3}, Y = \frac{3+t}{3}</math>  ゆえに <math>s = 3X - 3, t = 3Y - 3</math>  これを <math>\textcircled{3}</math> に代入すると  <math>(3X-3)^2 + (3Y-3)^2 = 5</math>  すなわち <math>(X-1)^2 + (Y-1)^2 = \frac{5}{9} \cdots \textcircled{4}</math>  また, <math>\triangle ABP</math> が存在するためには  <math>(s, t) \neq (1, 2), (2, 1)</math> より  <math>(X, Y) \neq \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right), \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)</math>  ゆえに, 条件を満たす点 G は, 円 <math>\textcircled{4}</math> から  2 点 <math>\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right), \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)</math> を除いた図形上にある。  逆に, 円 <math>\textcircled{4}</math> 上の 2 点 <math>\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right), \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)</math> を除く任意の  点 G <math>(X, Y)</math> は, 条件を満たす。  よって, 求める軌跡は, 中心が点 <math>(1, 1)</math>, 半径が <math>\frac{\sqrt{5}}{3}</math> の円から,  2 点 <math>\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right), \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)</math> を除いた図形である。 </p>
例 4	<p> <math>4S_n = a_n^2 + 4n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \cdots \textcircled{1}</math>において  <math>n = 1</math> とすると  <math>4S_1 = a_1^2 + 4</math>  <math>S_1 = a_1</math> より <math>4a_1 = a_1^2 + 4</math> これを解くと <math>a_1 = 2</math>  <math>\textcircled{1}</math>において <math>n = 2</math> とすると  <math>4S_2 = a_2^2 + 8</math>  <math>S_2 = a_1 + a_2</math> より <math>a_2^2 - 4a_2 = 0</math>  これを解くと <math>a_n &gt; 0</math> より <math>a_2 = 4</math> </p>

		<p>①において <math>n=3</math> とすると</p> $4S_3 = a_3^2 + 12$ $a_3^2 - 4a_3 - 12 = 0 \text{ これを解くと } a_n > 0 \text{ より } a_3 = 6$
	(2)	<p>(1) より <math>a_n = 2n \cdots</math> ②と予想できる。  以下、帰納法により証明。  (i) <math>n=1</math> のとき  <math>a_1 = 2</math> となり、明らかに成り立つ。  (ii) <math>n=k</math> のとき、②が成り立つと仮定する。  <math>n=k+1</math> のとき①より  <math display="block">4S_{k+1} = a_{k+1}^2 + 4(k+1) \cdots</math> ③  ①において <math>n=k</math> とすると <math>4S_k = a_k^2 + 4k \cdots</math> ④  ③−④より  <math display="block">4(S_{k+1} - S_k) = a_{k+1}^2 - a_k^2 + 4</math> <math display="block">4a_{k+1} = a_{k+1}^2 - 4k^2 + 4</math> <math display="block">a_{k+1}^2 - 4a_{k+1} - 4k^2 + 4 = 0</math> <math display="block">\{a_{k+1} - 2(k+1)\}\{a_{k+1} + 2(k-1)\} = 0</math> <math>a_{k+1} &gt; 0</math> より <math>a_{k+1} = 2(k+1)</math> となり  <math>n=k+1</math> のときも成り立つ。  (i)(ii) より、  すべての自然数 <math>n</math> について <math>a_n = 2n</math> は成り立つ。</p>
例 5	(1)	$\overrightarrow{AB} = (-7, 1, 5),$ $\overrightarrow{BC} = (4, -2, 6),$ $\overrightarrow{BD} = (2, -6, 4) \text{ より}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$
	(2)	<p><math>\triangle BCD</math> の面積</p> $= \frac{1}{2} \sqrt{ \overrightarrow{BC} ^2 \cdot  \overrightarrow{BD} ^2 - (\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD})^2}$ $= 10\sqrt{3} \cdots \cdots \cdots \text{①}$ $ \overrightarrow{AB}  = 5\sqrt{3} \cdots \cdots \cdots \text{②}$ <p>(1) より、<math>AB \perp BC</math>, <math>AB \perp BD</math> であり、  <math>AB \perp \triangle BCD</math> となる。  したがって、  四面体 <math>ABCD</math> の体積を <math>V</math> とすると  <math display="block">V = \frac{1}{3} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 50</math></p>

問題番号	正 答
例 6	<p>導関数の定義より，</p> $\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$ <p>(1) ここで，<math>f(x)</math>，<math>g(x)</math> は微分可能であるから</p> $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$ <p>また微分可能ならば連続であるから</p> $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$ <p>よって，<math>\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)</math> である。</p>
	<p>関数 <math>f(x) = \sin x</math> は連続かつ微分可能で，  <math>f'(x) = \cos x</math>  区間 <math>[a, b]</math> において平均値の定理を用いると，  <math display="block">\frac{\sin b - \sin a}{b - a} = \cos c, \quad a &lt; c &lt; b</math> を満たす <math>c</math> が  (2) 存在する。  <math>0 &lt; a &lt; c &lt; b &lt; \frac{\pi}{2}</math> より，<math>0 &lt; \cos c &lt; 1</math>  よって <math>0 &lt; \frac{\sin b - \sin a}{b - a} &lt; 1</math>  <math>b - a &gt; 0</math> より，<math>0 &lt; \sin b - \sin a &lt; b - a</math> である。</p>

問題番号	正 答
例 7	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: flex-start;"> <div style="width: 60%;"> <p> <math>y = \sqrt{x} \dots \textcircled{1}</math>  <math>\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \dots \textcircled{2}</math>  とする  <math>\textcircled{2}</math>より <math>\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \dots \textcircled{3}</math>  <math>x \geq 0, y \geq 0</math> より <math>0 \leq x \leq 1</math>  <math>\textcircled{3}</math>の両辺を2乗すると <math>y = 1 + x - 2\sqrt{x}</math>  よって <math>y' = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}</math>  ゆえに <math>0 &lt; x &lt; 1</math> で <math>y' &lt; 0</math>    よって <math>y</math> は区間 <math>0 \leq x \leq 1</math> で単調に減少する。    <math>\textcircled{1}</math>と<math>\textcircled{2}</math>の交点の <math>x</math> 座標は  <math>1 + x - 2\sqrt{x} = \sqrt{x}</math> から <math>(\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + 1 = 0</math>  <math>0 \leq x \leq 1</math> から <math>\sqrt{x} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}</math>  したがって <math>x = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}</math>    交点の <math>x</math> 座標を <math>\alpha</math> とおくと <math>\sqrt{\alpha} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}</math>    よって、求める面積を <math>S</math> とすると  <math display="block">S = \int_{\alpha}^1 \{\sqrt{x} - (1 + x - 2\sqrt{x})\} dx = \int_{\alpha}^1 (3\sqrt{x} - 1 - x) dx</math> <math display="block">= \left[ 2x^{\frac{3}{2}} - x - \frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^1</math> <math display="block">= \frac{1}{2} - 2\alpha^{\frac{3}{2}} + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} (\alpha + 2 - 4\alpha^{\frac{1}{2}})</math> <math display="block">= \frac{1}{2} + \frac{7 - 3\sqrt{5}}{4} \left\{ \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} + 2 - 2(3 - \sqrt{5}) \right\}</math> <math display="block">= \frac{5\sqrt{5} - 9}{4}</math> </p> </div> <div style="width: 35%; text-align: center;">  </div> </div>

問題番号		正 答
例 8	(1)	$y' = e^{x-n}$ であるから, 接点の座標を $(t, e^{t-n})$ とすると, 接線の方程式は $y = e^{t-n}(x-t) + e^{t-n}$ 点 $(n, 0)$ を通るので $0 = e^{t-n}(n-t) + e^{t-n}$ $e^{t-n}(n-t+1) = 0$ を解いて $t = n+1$ よって $\ell$ の方程式は $y = e(x-n)$
	(2)	(1) より $V = \pi \int_n^{n+1} \left\{ (e^{x-n})^2 - e^2(x-n)^2 \right\} dx$ $= \pi \left[ \frac{1}{2} e^{2x-2n} - \frac{e^2}{3} (x-n)^3 \right]_n^{n+1}$ $= \frac{\pi}{6} (e^2 - 3) \quad (\text{一定})$
例 9	a	命題の証明
	b	$0^\circ$ , $90^\circ$ , $180^\circ$ の三角比
	c	学習効果
例10	a	ク
	b	カ
	c	エ
	d	ケ
	e	ス
	f	ウ