

中学校数学 専門問題例

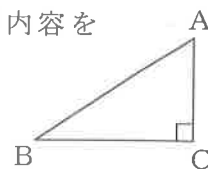
例 1 3桁の自然数の百の位、十の位、一の位を、それぞれ a, b, c とするとき、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

- (1) $a=b$ かつ $a>c$ を満たす3桁の自然数はいくつあるか求めなさい。
- (2) a, b, c のうち2つが等しく残りの1つがそれよりも小さいような3桁の自然数はいくつあるか求めなさい。
- (3) $a>b>c$ を満たす3桁の自然数はいくつあるか求めなさい。

例 2 4点 $A(7, 5, 0), B(0, 6, 5), C(4, 4, 1), D(2, 0, 9)$ について、次の(1)・(2)の問いに答えなさい。

- (1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$ の値を求めなさい。
- (2) 四面体 $ABCD$ の体積を求めなさい。

例 3 右図の $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形 ABC について、中学校の学習内容をもとに、三平方の定理の証明を2通り書きなさい。



例 4 正の実数からなる数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とおく。

数列 $\{a_n\}$ が $4S_n = a_n^2 + 4n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を満たすとき、次の(1)・(2)の問いに答えなさい。

- (1) a_1, a_2, a_3 を求めなさい。
- (2) a_n を予想し、それが正しいことを数学的帰納法により証明しなさい。

例 5 「2つの整数が奇数と奇数のとき、その2数の積は奇数になる。」という数の性質を予想し、それを文字式を使って証明するという問題を、第3学年の生徒に指導する場合の板書の内容を書きなさい。

例6 中学校学習指導要領「数学」の内容について、次の(1)・(2)の問いに答えなさい。

- (1) 次の文は、「第2 各学年の目標及び内容」における各学年の「1 目標」の一部である。(a)～(f)にあてはまる語句を書きなさい。

第1学年	(4) 目的に応じて資料を(a)し、その資料の(b)を読み取る能力を培う。
第2学年	(2) 基本的な平面図形の性質について、観察、(c)などの活動を通して理解を深めるとともに、図形の性質の考察における(d)の必要性和意味及びその方法を理解し、論理的に考察し表現する能力を養う。
第3学年	(1) (e)について理解し、数の概念についての理解を深める。また、目的に応じて計算したり式を変形したりする能力を伸ばすとともに、(f)について理解し用いる能力を培う。

- (2) 次の文は、「第3 指導計画の作成と内容の取扱い」の一部である。(a)～(f)にあてはまる語句を、下のア～タの中からそれぞれ1つ選び、記号で書きなさい。

3 数学的活動の指導に当たっては、次の事項に配慮するものとする。

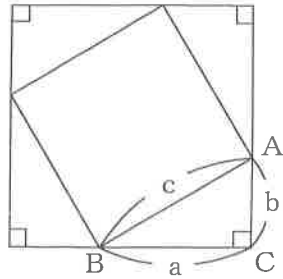
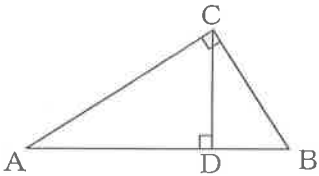
- (1) 数学的活動を楽しめるようにするとともに、数学を学習することの(a)や数学の(b)などを実感する機会を設けること。
- (2) 自ら課題を見いだし、解決するための(c)を立て、実践し、その結果を評価・(d)する機会を設けること。
- (3) 数学的活動の過程を振り返り、(e)にまとめ発表することなどを通して、その成果を(f)する機会を設けること。

ア よさ	イ 共有	ウ 有用性	エ 構想
オ 筋道	カ 活用	キ レポート	ク ノート
ケ 必要性	コ 意義	サ 効果	シ 考察
ス プレゼンテーション	セ 説明	ソ 計画	タ 改善

中学校数学 正答例（その1）

問題番号		正 答
例 1	(1)	<p>0～9の10個の数字から異なる2個を選び、大きい方の数字を$a(=b)$とし、小さい方の数字をcとすると、$a=b$かつ$a>c$を満たす3桁の自然数が1つ決まる。 したがって ${}_{10}C_2=45$ (個)</p>
	(2)	<p>i) $a=c$かつ$a>b$を満たす3桁の自然数は、(1)と同様にして ${}_{10}C_2=45$ (個) ii) $a\neq 0$より、1～9の9個の数字から異なる2個を選び、大きい方の数字を$b(=c)$とし、小さい方の数字をaとすると、$b=c$かつ$b>a$を満たす3桁の自然数が1つ決まる。 ゆえに ${}_9C_2=36$ (個) (1), i), ii)より 求める自然数の個数は $45+45+36=126$ (個)</p>
	(3)	<p>0～9の10個の数字から異なる3個を選び、最も大きい数字をa、2番目に大きい数字をb、最も小さい数字をcとすると、$a>b>c$を満たす3桁の自然数が1つ決まる。 したがって ${}_{10}C_3=120$ (個)</p>
例 2	(1)	<p>$\overrightarrow{AB}=(-7, 1, 5),$ $\overrightarrow{BC}=(4, -2, 6),$ $\overrightarrow{BD}=(2, -6, 4)$より $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0, \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=0$</p>
	(2)	<p>$\triangle BCD$の面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{ \overrightarrow{BC} ^2\cdot \overrightarrow{BD} ^2-(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD})^2}$ $=10\sqrt{3} \dots\dots\dots ①$ $\overrightarrow{AB} =5\sqrt{3} \dots\dots\dots ②$ <p>(1)より、$AB\perp BC, AB\perp BD$であり、 $AB\perp \triangle BCD$となる。 したがって、四面体$ABCD$の体積をVとすると $V=\frac{1}{3}\cdot 10\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}=50$</p> </p>

中学校数学 正答例（その2）

問題番号	正 答
例 3	<p>（証明例）</p> <p>直角三角形ABCで、$BC = a$，$AC = b$，$AB = c$とする。</p> <p>右の図のように、直角三角形ABCと合同な三角形を、1辺がcの正方形のまわりにかき、1辺がa + bの正方形をつくる。</p>  <p>1辺がcの正方形の面積は、 (外側の正方形の面積) - (△ABCの面積) × 4 であるから、</p> $c^2 = (a + b)^2 - \frac{1}{2}ab \times 4$ $= (a^2 + 2ab + b^2) - 2ab$ $= a^2 + b^2$ <p>したがって、$a^2 + b^2 = c^2$</p>
	<p>（証明例）</p> <p>右の図のように、直角三角形ABCの頂点Cから斜辺ABに垂線CDを引く。</p>  <p>△ABC ∽ △ACDから、 $AB : AC = AC : AD$ $AC^2 = AB \times AD \dots \textcircled{1}$</p> <p>△ABC ∽ △CBDから、 $AB : CB = BC : BD$ $BC^2 = AB \times BD \dots \textcircled{2}$</p> <p>①，②の両辺をそれぞれたすと、 $AC^2 + BC^2 = AB \times AD + AB \times BD$ $= AB \times (AD + BD)$ $= AB^2$</p> <p>したがって、$AC^2 + BC^2 = AB^2$</p>

中学校数学 正答例（その3）

問題番号	正 答
例 4	<p>(1)</p> $4S_n = a_n^2 + 4n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots \textcircled{1}$ <p>において</p> $n=1 \text{ とすると}$ $4S_1 = a_1^2 + 4$ $S_1 = a_1 \text{ より } 4a_1 = a_1^2 + 4 \text{ これを解くと } a_1 = 2$ <p>①において $n=2$ とすると</p> $4S_2 = a_2^2 + 8$ $S_2 = a_1 + a_2 \text{ より } a_2^2 - 4a_2 = 0$ <p>これを解くと $a_n > 0$ より $a_2 = 4$</p> <p>①において $n=3$ とすると</p> $4S_3 = a_3^2 + 12$ $a_3^2 - 4a_3 - 12 = 0 \text{ これを解くと } a_n > 0 \text{ より}$ $a_3 = 6$
	<p>(2)</p> <p>(1) より $a_n = 2n \dots \textcircled{2}$ と予想できる。</p> <p>以下，帰納法により証明。</p> <p>(i) $n=1$ のとき</p> <p>$a_1 = 2$ となり，明らかに成り立つ。</p> <p>(ii) $n=k$ のとき，②が成り立つと仮定する。</p> <p>$n=k+1$ のとき①より</p> $4S_{k+1} = a_{k+1}^2 + 4(k+1) \dots \textcircled{3}$ <p>①において $n=k$ とすると $4S_k = a_k^2 + 4k \dots \textcircled{4}$</p> <p>③－④より</p> $4(S_{k+1} - S_k) = a_{k+1}^2 - a_k^2 + 4$ $4a_{k+1} = a_{k+1}^2 - 4k^2 + 4$ $a_{k+1}^2 - 4a_{k+1} - 4k^2 + 4 = 0$ $\{a_{k+1} - 2(k+1)\}\{a_{k+1} + 2(k-1)\} = 0$ <p>$a_{k+1} > 0$ より $a_{k+1} = 2(k+1)$ となり</p> <p>$n=k+1$ のときも成り立つ。</p> <p>(i)(ii) より，</p> <p>全ての自然数 n について $a_n = 2n$ は成り立つ。</p>

中学校数学 正答例（その4）

問題番号		正	答												
例 5		<p>証明) 2つの整数が奇数 と奇数のとき,</p> <p>2つの奇数を, $2m+1$, $2n+1$ (m, nは整数) と表す。</p> <p>このとき, 2つの奇 数の積は,</p> $(2m+1)(2n+1)$ $= 4mn + 2m + 2n + 1$ $= 2(2mn + m + n) + 1$ <p>$2mn + m + n$ は整数だから, これは奇数である。</p> <p>つまり, 2つの整数が奇数と奇数のとき, その2数の積は奇 数になる。</p>													
	(1)	<table><tr><td>a</td><td>収集して整理</td><td>b</td><td>傾向</td></tr><tr><td>c</td><td>操作や実験</td><td>d</td><td>数学的な推論</td></tr><tr><td>e</td><td>数の平方根</td><td>f</td><td>二次方程式</td></tr></table>		a	収集して整理	b	傾向	c	操作や実験	d	数学的な推論	e	数の平方根	f	二次方程式
a	収集して整理	b	傾向												
c	操作や実験	d	数学的な推論												
e	数の平方根	f	二次方程式												
	(2)	<table><tr><td>a</td><td>コ</td><td>b</td><td>ケ</td><td>c</td><td>エ</td></tr><tr><td>d</td><td>タ</td><td>e</td><td>キ</td><td>f</td><td>イ</td></tr></table>		a	コ	b	ケ	c	エ	d	タ	e	キ	f	イ
a	コ	b	ケ	c	エ										
d	タ	e	キ	f	イ										